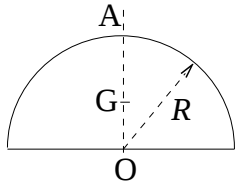
Examen de mécanique du solide

Lundi 5 novembre 2012 (1,5 heure)

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. *(~ 3 points)*



Soit un demi-disque de rayon R et de centre O, homogène de masse m, d'épaisseur négligeable (la masse du disque est donc surfacique). L'axe (O,z) est l'axe perpendiculaire au plan du demi-disque passant par O.

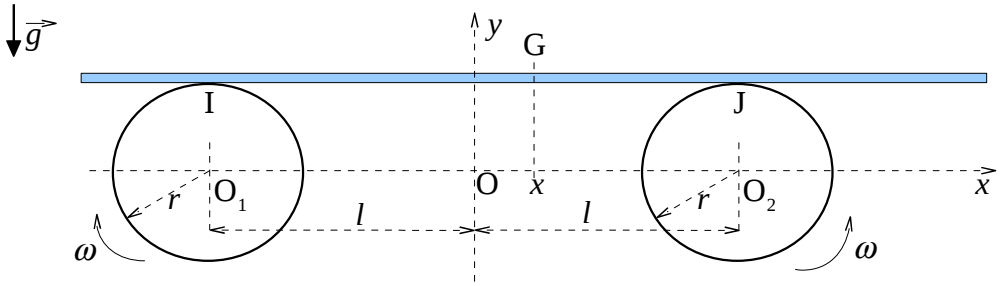
a) Calculer le moment d'inertie du demi-disque par rapport à l'axe (O,z).

b) Par symétrie le centre de gravité G du demi-disque est sur le segment [O,A].

Montrer que OG = $\dfrac{4R}{3\pi}$.

c) En déduire le moment d'inertie du demi-disque par rapport à l'axe (A,z). (A,z) est la droite parallèle à (O,z) passant par le point A défini sur la figure.

Exercice 2. Expérience de Timotchenko *(~ 8 points)*



Deux cylindres de rayon r, tournent en sens opposés à la vitesse angulaire ω autour de leur axes respectifs (O_1,z) et (O_2,z) distants de 2l. Leur sens de rotation sont donnés sur la figure $(\omega>0)$. Les axes (O_1,z) et (O_2,z) sont fixes. Une planche indéformable, homogène de masse m, d'épaisseur négligeable est placée sur les cylindres (voir figure). Les coefficients de frottement dynamique aux points de contact I et J entre la planche et les cylindres sont égaux à μ . La planche est suffisamment longue pour être toujours en contact avec les cylindres en I et J (voir figure).

Soit O le milieu de [O_1,O_2] et G le centre de gravité (milieu) de la planche. On note x l'abscisse de G dans (O;x,y,z). Expérimentalement, on constate que la planche effectue des petites oscillations dans le plan horizontal. Le but de l'exercice est de calculer la période de ces oscillations.

Soient $\vec{R}_I = T_I \vec{u}_x + N_I \vec{u}_y$ et $\vec{R}_J = T_J \vec{u}_x + N_J \vec{u}_y$ les forces de contact des cylindres sur la planche en I et J.

On supposera qu'à chaque instant : $-r\omega < \dot{x} < r\omega$.

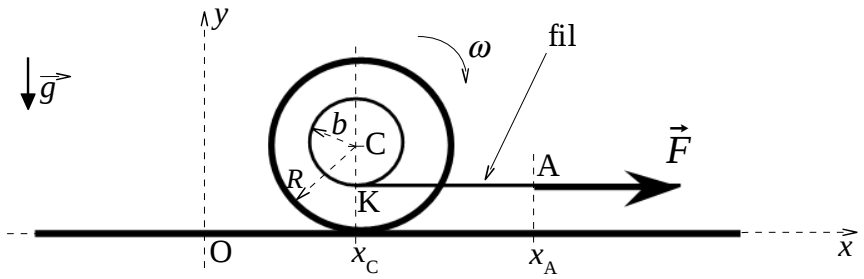
a) Déterminer les vitesses de glissement en I et en J en fonction de ω , r et $\dot{x}$.

b) Quelles sont les forces extérieures sur la barre ? Justifier que $T_I = +\mu N_I$ et $T_J = -\mu N_J$. Faire un schéma représentant toutes les forces extérieures et leur points d'application.

c) En utilisant le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique) et le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle du mouvement (équation différentielle dont $x(t)$ est solution. t est le temps).

d) En déduire la période des oscillations de la barre.

Exercice 3. Mouvement horizontal d'un Yoyo *(~ 9 points)*



Un yoyo de rayon interne b, de rayon externe R, de masse m, et de moment d'inertie J par rapport à son axe de symétrie, est posé sur le sol horizontal. Initialement, le yoyo ne bouge pas et l'abscisse de son centre C est $x_C = 0$ (voir figure). On supposera que le mouvement du yoyo reste dans le plan (O;x,y) et que le yoyo ne glisse jamais. Le coefficient de frottement statique entre le yoyo et le sol est μ . Le fil du yoyo est supposé inextensible et sans masse ; il peut s'enrouler sur la bobine de rayon b du yoyo.

Aux temps $t \geq 0$, une force constante $\vec{F} = F\,\vec{u}_x$ ($F > 0$) est appliquée au bout A du fil (voir figure). Initialement, $x_A = l > 0$.

Indication : Expérimentalement on constate : que le yoyo se déplace dans le sens de $\vec{F}$, que le fil s'enroule sur le yoyo et que le point A se déplace dans le sens de $\vec{F}$.

a) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω du yoyo et la vitesse $\dot{x}_C$ de son centre C.

b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique) et le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ et la vitesse angulaire ω du yoyo en fonction de R, b, m, J, F et du temps t.

c) En déduire la position $x_C(t)$ de C à l'instant t.

d) Sachant que le fil s'enroule sans glisser sur la bobine (de rayon b du yoyo), exprimer la vitesse $\vec{v}_K$ du point K de contact entre le fil et la bobine.

Le fil étant inextensible on a $\vec{v}_A = \vec{v}_K$. En déduire l'abscisse $x_A(t)$ à l'instant t.

e) Déterminer l'énergie cinétique du yoyo dans le référentiel du sol à l'instant t en fonction de R, b, m, J, F et t.

f) Énoncer le théorème de la puissance cinétique.
Montrer qu'il est bien vérifié pour le système étudié.